第23講　図形と方程式(3)

【基礎確認事項】

［1］　軌跡の方程式

□与えられた条件を満足する点が動いてできる図形を，その条件を満足する点の**軌跡**という．

例　平面上で定点Oから一定の距離 r にある点Pの軌跡は，

Oを中心とする半径 r の円である．

つまり軌跡とは，与えられた条件を満たす点全体の集合である．

□点Pの軌跡を求める手順は以下となる．

> (Ⅰ)　条件を満たす点を $(X,\ Y)$ などで表し，この点が満たす条件式を求め，それがどのような図形を表すかを調べる．
>
> (Ⅱ)　逆に(Ⅰ)で求めた図形の任意の点Pが，条件を満足することを確かめる．

(Ⅱ)については，(Ⅰ)の計算を逆にたどることによって成り立つことがわかる場合が多い．このように同値性が保たれている場合は，逆の証明を簡単に述べる，または省略することが多い．

□軌跡を求めるときは，

・軌跡を求める点をあらかじめ $(X,\ Y)$ とおき，それを条件にしたがって利用する場合

・条件にしたがって軌跡を求める点を表し，それを $(X,\ Y)$ と置き換える場合

に大きく分かれる．

□また軌跡を求める点以外に動くことができる点が存在する場合は，その点を別の文字で設定した上で，条件にしたがって軌跡を求める点を表し，それを $(X,\ Y)$ と置き換える．

置き換えた場合は，X，Y のそれぞれが別の文字で表されている．これを**媒介変数**（パラメータ）という．これらの式からパラメータを消去して1つの式にすることで，軌跡を表す方程式を作成することができる．

⇒　C&U ①②

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　2点A(1, 0), B(0, 2)に対し, AP：BP＝1：2を満たす点Pの軌跡を求めよ.

2　aが実数のとき, 放物線$y=x^2+2ax-1$の頂点Pが描く軌跡を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　図形と方程式(3)

1 (1)　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が $2:1$ であるという．点Pの軌跡を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする．$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの描く軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　点Pが円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くとき，3点A(0，0)，B(2，−2)，Pを頂点とする三角形ABPの重心Gの軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　放物線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C と l が異なる2点A，Bで交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　図形と方程式(3)

定点 O(0, 0), A(4, 2) と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の周上を動く点 P がある．次の問いに答えよ．

(1)　3 点 O, A, P が同一直線上にあるとき，点 P の座標は (4, 2) または $\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right)$ である．

(2)　△OAP の重心の軌跡は，中心 $\left(\boxed{オ},\ \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ の円である．ただし，点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{コ}}{5},\ \dfrac{\boxed{サ}}{5}\right)$ を除く．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　図形と方程式(3)

【CHECK & UP】

1　点Pの座標を $(X,\ Y)$ とする．

条件 $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$　より　$2\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$

両辺を2乗して　$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$4\{(X-1)^2+Y^2\}=X^2+(Y-2)^2$

$3X^2+3Y^2-8X+4Y=0$

$X^2+Y^2-\dfrac{8}{3}X+\dfrac{4}{3}Y=0$

$\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(Y+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{20}{9}$

（逆にこの式を満たす点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は，条件 $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$ を満たす）

したがって，求める点Pの軌跡は，**中心 $\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$　半径 $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ の円**である．

> 代表的な問題を通じ，軌跡を求める流れを身につけていこう．
> 　まずは点Pの座標を先におく場合である．この問題に関しては，おき方は $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$，$(s,\ t)$ など何でもよい．当然，問題文に予め使われている文字は避けねばならないし，与えられている場合はそれを使う必要がある．
> 　「軌跡」は図形であるから，軌跡の方程式だけ答えるわけにはいかない（「軌跡の方程式を求めよ」となっている場合は除く）．例えば $(s,\ t)$ とおいて解いた場合に出てくる式は $s,\ t$ に関する式であり，「$s^2+t^2=1$」が「原点を中心とする半径1の円」となるわけである．
> 　また，「逆に～」のくだりは，式変形において同値性が保たれている場合は省略してもよい．

2　$y=x^2+2ax-1=(x+a)^2-a^2-1$

よってこの放物線の頂点は　$(-a,\ -a^2-1)$ である．

この頂点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，

$X=-a$　……①　　$Y=-a^2-1$　……②

①より　$a=-X$　これを②に代入して

$Y=-(-X)^2-1$　つまり　$Y=-X^2-1$

したがって，求める点Pの軌跡は

放物線　$y=-x^2-1$　である．

> 点Pの座標を求め，それを後から $(X,\ Y)$ と置き換える場合である．
> 　この場合は，x 座標と y 座標が別の式として出てくる．そこには「パラメータ」が含まれているはずである．パラメータを消去し，2つの式を1つにつなげることができれば，それが求める軌跡の方程式である．
> 　問題によっては2式をつなげるのに苦労する問題も存在する．さまざまな問題を通じて解法を学んでいくのがよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　図形と方程式(3)

1　(1)　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が $2:1$ であるという．点Pの軌跡を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする．$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの描く軌跡を求めよ．

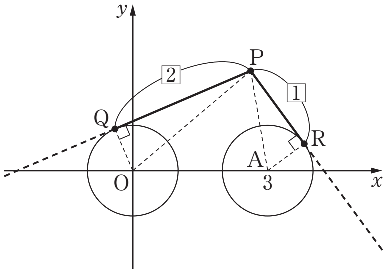
(1)　円 $x^2+y^2=1$　……①　の中心をOとすると，O(0, 0)　半径は1

円 $(x-3)^2+y^2=1$　……②　の中心をAとすると，A(3, 0)　半径は1

点Pの座標を $(X,\ Y)$ とする．

点Pから円①に引いた接線とこの円との接点をQとすると　$PQ^2=OP^2-OQ^2=X^2+Y^2-1$

点Pから円②に引いた接線とこの円との接点をRとすると　$PR^2=AP^2-AR^2=(X-3)^2+Y^2-1$



条件より　$PQ:PR=2:1$　　$2PR=PQ$

両辺2乗して　$4PR^2=PQ^2$

よって　$4\{(X-3)^2+Y^2-1\}=X^2+Y^2-1$

$3X^2-24X+3Y^2+33=0$

$X^2-8X+Y^2+11=0$　　$(X-4)^2+Y^2=5$

したがって求める軌跡は　**中心 (4, 0)，半径 $\sqrt{5}$ の円**

(2)　$y=x^2+(4-4a)x+4a-4=\{x-(2a-2)\}^2-4a^2+12a-8$

頂点Pの座標は　$(2a-2,\ -4a^2+12a-8)$

頂点Pの座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=2a-2$　……①　　$Y=-4a^2+12a-8$　……②

①より　$a=\dfrac{X+2}{2}$　　これを②に代入して　$Y=-4\left(\dfrac{X+2}{2}\right)^2+12\cdot\dfrac{X+2}{2}-8$

つまり　$Y=-X^2+2X$

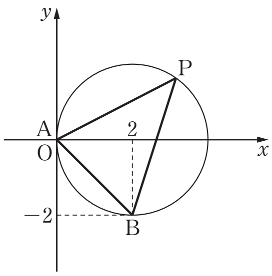
また，$0<a\leqq 2$ より　$0<\dfrac{X+2}{2}\leqq 2$　つまり　$-2<X\leqq 2$

したがって求める軌跡は，**放物線 $y=-x^2+2x$ の $-2<x\leqq 2$ の部分**．

2　点Pが円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くとき，3点A(0, 0)，B(2, −2)，Pを頂点とする三角形ABPの重心Gの軌跡を求めよ．

$P(s,\ t)$ とおくと，△ABPの重心Gの座標は　$\left(\dfrac{0+2+s}{3},\ \dfrac{0-2+t}{3}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



G$(X,\ Y)$ とおくと，$X=\dfrac{2+s}{3}$，$Y=\dfrac{-2+t}{3}$

したがって　$s=3X-2$，$t=3Y+2$

P$(s,\ t)$ は円 $x^2+y^2-4x=0$ 上の点であることより

$s^2+t^2-4s=0$

よって　$(3X-2)^2+(3Y+2)^2-4(3X-2)=0$

$9X^2+9Y^2-24X+12Y+16=0$

$X^2+Y^2-\dfrac{8}{3}X+\dfrac{4}{3}Y+\dfrac{16}{9}=0$　　$\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(Y+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

ここで，P$(s,\ t)=(0,\ 0)$，$(2,\ -2)$ のときはそれぞれ P と A，P と B が一致し，三角形ができないため不適.

よって　$(s,\ t)\neq(0,\ 0)$，$(2,\ -2)$　　つまり　$(X,\ Y)\neq\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$

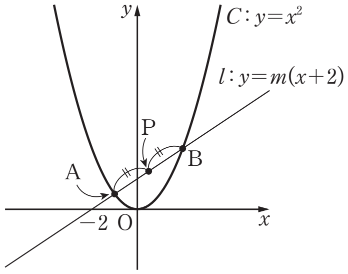
したがって求める軌跡は

中心 $\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2}{3}$ の円．ただし，2点 $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ を除く.

3　放物線 C：$y=x^2$ と直線 l：$y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ.

(1)　C と l が異なる2点 A，B で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

(2)　(1)のとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ.



(1)　$y=x^2$ と $y=m(x+2)$ より

$x^2=m(x+2)$　　$x^2-mx-2m=0$　……①

C と l が異なる2点で交わるのは，①の判別式を D とすると

$D=m^2+8m>0$　　$m(m+8)>0$

よって　$\boldsymbol{m<-8,\ 0<m}$

(2)　(1)のとき2点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，

α，β は①の異なる2解.

よって解と係数の関係により　$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=-2m$

P$(X,\ Y)$ とすると，P は線分 AB の中点であることより

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m}{2}$　……②　　$Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\dfrac{m^2+4m}{2}$　……③

②より $m=2X$　　これを③に代入して　$Y=\dfrac{(2X)^2+4\cdot 2X}{2}=2X^2+4X$

また(1)より　$m<-8$，$0<m$　よって　$2X<-8$，$0<2X$　つまり　$X<-4$，$0<X$

したがって求める軌跡は　**放物線 $y=2x^2+4x$ の $x<-4$，$0<x$ の部分.**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　図形と方程式(3)

定点 O(0, 0)，A(4, 2) と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の周上を動く点 P がある．次の問いに答えよ．

(1)　3 点 O，A，P が同一直線上にあるとき，点 P の座標は (4, 2) または

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である．

(2)　△OAP の重心の軌跡は，中心 $\left(\boxed{\text{オ}},\ \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ の円である．ただし，点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{5},\ \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{5}\right)$ を除く．

(1)　直線 OA：$y=\dfrac{1}{2}x$ と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の交点の y 座標は

$(2y-2)^2+(y-2)^2=4$　　つまり　$5y^2-12y+4=0$　より　$y=2,\ \dfrac{2}{5}$　であるから，

3 点 O，A，P が一直線上にあるとき，点 P の座標は　(4, 2) または $\left(\mathbf{\dfrac{4}{5}},\ \mathbf{\dfrac{2}{5}}\right)$ である．

(2)　点 P の座標を $(s,\ t)$ とおくと，△OAP の重心 G の座標は $\left(\dfrac{s+4}{3},\ \dfrac{t+2}{3}\right)$ と表せる．

重心 G の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，$X=\dfrac{s+4}{3}$，$Y=\dfrac{t+2}{3}$ より　$s=3X-4$，$t=3Y-2$ である．

また $P(s,\ t)$ は円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 上の点であることより，

$$(3X-4-2)^2+(3Y-2-2)^2=4 \qquad \{3(X-2)\}^2+\left\{3\left(Y-\frac{4}{3}\right)\right\}^2=4$$

$$9(X-2)^2+9\left(Y-\frac{4}{3}\right)^2=4 \qquad (X-2)^2+\left(Y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

さらに $(s,\ t)\neq(4,\ 2),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ より，$(X,\ Y)\neq\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right),\ \left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ である．

したがって，求める重心 G の軌跡は　中心 $\left(\mathbf{2},\ \mathbf{\dfrac{4}{3}}\right)$，半径 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ の円．

ただし，点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$，$\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ を除く．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。